


Correction Feuille Exercice 13

 *Calculer la limite d'une suite explicite*

Exercice 9

1. La première limite étant une forme indéterminée, on utilise la quantité conjuguée

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2 + 1} - n &= \frac{(\sqrt{n^2 + 1} - n)(\sqrt{n^2 + 1} + n)}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \\ &= \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

2. D'après la règle des limites sur les fractions rationnelles

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty.$$

Exercice 10 (*)

1. On détermine la limite de la suite $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n \end{cases}$. On reconnaît une suite géométrique dont la forme explicite est

$$u_n = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Or comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

2. On détermine la limite de la suite $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + \frac{2}{3} \end{cases}$. On reconnaît une suite arithmético-géométrique.

On résout alors l'équation

$$\begin{aligned}x = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} &\iff \frac{2}{3}x = \frac{2}{3} \\ &\iff x = 1\end{aligned}$$

On introduit alors la suite $w_n = v_n - 1$ et donc $w_0 = 2 - 1 = 1$. On vérifie que (w_n) est une suite géométrique :

$$\begin{aligned}w_{n+1} &= v_{n+1} - 1 \\ &= \frac{1}{3}v_n + \frac{2}{3} - 1 \\ &= \frac{1}{3}v_n - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}(v_n - 1) \\ &= \frac{1}{3}w_n\end{aligned}$$

La suite (w_n) est donc géométrique de raison $1/3$. On a alors $w_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et donc

$$v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + 1.$$

Or comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1.$$

Exercice 11 (**)

On joue à pile ou face avec une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir Pile vaut p et celle de Face vaut $1 - p$. On note P_k resp(F_k) l'évènement : "on obtient pile (resp. Face) au k ème lancer". On lance indéfiniment la pièce et on note X le rang où apparaît pour la première fois deux résultats pile consécutifs. Par exemple, si les premiers lancers donnent FPFPPFP alors $X = 8$.

1. L'évènement $X = 1$ signifie que deux piles consécutifs sont apparus pour la première fois au tirage n°1. Cela est impossible :

$$P(X = 1) = 0.$$

L'évènement $X = 2$ signifie que deux piles consécutifs sont apparus pour la première fois au tirage n°2. Cela arrive si l'on obtient deux piles. Comme les évènements P_1 et P_2 sont indépendants,

$$P(X = 2) = P(P_1 \cap P_2) = p^2.$$

L'évènement $X = 3$ signifie que deux piles consécutifs sont apparus pour la première fois au tirage n°3. Cela arrive si l'on obtient une face puis deux piles. F_1 , P_2 et P_3 étant mutuellement indépendants,

$$P(X = 3) = P(F_1 \cap P_2 \cap P_3) = (1 - p)p^2.$$

L'évènement $X = 4$ signifie que deux piles consécutifs sont apparus pour la première fois au tirage n°4. Cela arrive si l'on obtient deux faces puis deux piles ou un pile, une face, deux piles. Les évènements étant mutuellement indépendant, l'on a

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= P(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) + P(P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \\ &= (1 - p)^2 p^2 + p^3 (1 - p) \\ &= (1 - p)p^2 \end{aligned}$$

2. On a

$$F_1 \cup (P_1 \cap F_2) \cup (P_1 \cap P_2) = \Omega$$

En effet une expérience commencera soit par la première pièce qui fait face, soit par la première pièce qui fait pile. Dans ce deuxième cas, la seconde pièce pourra alors faire face ou pile. Et on a $F_1 \cap P_1 \cap P_2 = \emptyset$, $F_1 \cap P_1 \cap F_2 = \emptyset$ et $P_1 \cap P_2 \cap P_1 \cap F_2 = \emptyset$. Ainsi,

$$\{F_1, P_1 \cap F_2, P_1 \cap P_2\} \text{ forme un système complet d'évènements.}$$

3. On en déduit d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(X = n + 2) &= P(F_1)P_{F_1}(X = n + 2) + P(P_1 \cap F_2)P_{P_1 \cap F_2}(X = n + 2) \\ &\quad + P(P_1 \cap P_2)P_{P_1 \cap P_2}(X = n + 2) \end{aligned}$$

Or, si l'évènement $P_1 \cap P_2$ se réalise alors $X = 2$. Donc

$$P_{P_1 \cap P_2}(X = n + 2) = 0$$

Sachant que la première pièce donne face, avoir $X = n + 2$ correspond à avoir $X = n + 1$ sans connaître le résultat de la première pièce. Donc

$$P_{F_1}(X = n + 2) = P(X = n + 1)$$

De la même façon, sachant que la première pièce donne pile et la seconde face, avoir $X = n + 2$ correspond à avoir $X = n$ sans connaître le résultat de la première pièce et la deuxième pièce. Donc

$$P_{P_1 \cap F_2}(X = n + 2) = P(X = n)$$

Enfin, les évènements P_1 et F_2 étant indépendants, on a

$$P(P_1 \cap F_2) = p(1 - p)$$

donc,

$$\boxed{\forall n \geq 1, P(X = n + 2) = (1 - p)P(X = n + 1) + p(1 - p)P(X = n).}$$

4. On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (on pourra poser $u_n = P(X = n)$ et vérifier que $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n$). On résout alors l'équation caractéristique

$$x^2 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} \iff x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}$$

Le discriminant est $\Delta = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} = 1$. Cette équation caractéristique a donc deux solutions

$$x_1 = \frac{\frac{1}{3} - 1}{2} = -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{\frac{1}{3} + 1}{2} = \frac{2}{3}$$

Ainsi, on a pour tout $n \geq 1$,

$$P(X = n) = \alpha \left(\frac{2}{3}\right)^n + \beta \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

En utilisant le fait que $P(X = 1) = 0$ et $P(X = 2) = \frac{4}{9}$, on obtient le système d'équation

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta &= 0 \\ \frac{4}{9}\alpha + \frac{1}{9}\beta &= \frac{4}{9} \end{cases} &\iff \begin{cases} 2\alpha - \beta &= 0 \\ 4\alpha + \beta &= 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2\alpha - \beta &= 0 \\ 6\alpha &= 4 \quad L_1 + L_2 \rightarrow L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \beta &= \frac{4}{3} \\ \alpha &= \frac{2}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} P(X = n) &= \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{4}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{4}{9} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{4}{9} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right) \end{aligned}$$

5. On a d'une part,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X = n) = 0.}$$

Ce résultat signifie qu'il est très peu probable d'obtenir deux piles consécutifs pour la première fois au n -ième tirage quand n devient très grand. Cela est cohérent avec l'expérience.

Exercice 12 (**)

On considère la suite u définie par : $\forall n \geq 2, u_{n+1} = u_n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ et $u_2 = 1$

1. On montre par récurrence $\mathcal{P}_n : \{0 < u_n \leq 1\}$

Initialisation : On a $u_2 = 1$ donc \mathcal{P}_2 est vraie.

Hérédité : On suppose la propriété \mathcal{P}_n vraie pour un certain $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} 0 < u_n \leq 1 &\iff 0 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) < u_n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \leq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\ &\iff 0 < u_{n+1} \leq 1 \end{aligned}$$

La propriété \mathcal{P}_{n+1} est vraie. (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \geq 2, 0 < u_n \leq 1.}$

Comme l'on a $u_n > 0$, on s'intéresse à

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \leq 1$$

$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

2. La suite u est décroissante et minorée par 0. $\boxed{\text{Elle est donc convergente.}}$

3. On montre par récurrence $\mathcal{P}_n : \left\{ \forall n \geq 2, u_n = \frac{n}{2(n-1)} \right\}$

Initialisation : On a $u_2 = 1$ et $\frac{2}{2 \times (2-1)} = 1$. Donc \mathcal{P}_2 est vraie.

Hérédité : On suppose la propriété \mathcal{P}_n vraie pour un certain $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{n}{2(n-1)} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) \\ &= \frac{n(n-1)(n+1)}{2(n-1)n^2} \\ &= \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

La propriété \mathcal{P}_{n+1} est vraie. (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \geq 2, u_n = \frac{n}{2(n-1)}}.$

On en déduit, d'après la propriété des limites d'une fraction rationnelle que :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2(n-1)} = \frac{1}{2}}$$

Calculer la limite par encadrement ou comparaison

Exercice 13 ()

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = 4$ et la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{3}|u_n - 2|$$

1. On va montrer par récurrence les propositions $\mathcal{P}_n : \left\{ |u_n - 2| \leq 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}$.

• **Initialisation :** On a bien $|u_0 - 2| = |4 - 2| = 2 \leq 2$ donc \mathcal{P}_0 est vraie.

• **Hérédité :** On suppose que la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a donc $|u_n - 2| \leq 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Comme $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{3}|u_n - 2|$, on a alors

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{3}|u_n - 2| &\implies |u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{3} \times 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &\implies |u_{n+1} - 2| \leq 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Donc la proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

• **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, |u_n - 2| \leq 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}.$

2. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$. En appliquant le théorème des gendarmes (son corollaire), on sait que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.}$$

Exercice 14 (*)

On considère la suite $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. On cherche à montrer que celle-ci diverge à l'infini. On suppose que l'on

a démontré précédemment le résultat suivant : $\forall x \geq 1, \quad \frac{1}{x} \geq \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

1. D'après la relation précédente, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \geq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) &\implies \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \\ &\implies u_n \geq \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &\implies u_n \geq \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k) \end{aligned}$$

On reconnaît une somme télescopique à droite et donc

$$\boxed{\forall n \geq 1, u_n \geq \ln(n+1).}$$

2. On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$. D'après les théorèmes de comparaison sur les suites, on en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est divergente vers } +\infty.}$$

Exercice 15 (EDHEC 2008 - **)

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + n x.$$

1. (a) La fonction f_n est dérivable sur \mathbb{R} en tant que somme et quotient de fonctions dérivables. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{f'_n(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} + n}$$

La fonction f'_n est dérivable sur \mathbb{R} en tant que somme et quotient de fonctions dérivables. On a également

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f''_n(x) &= \frac{-e^x(1+e^x)^2 + e^x \times 2 \times e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4} \\ &= \frac{e^x(2e^x + 2e^{2x} - (1+e^x)^2)}{(1+e^x)^4} \\ &= \frac{e^x(2e^x + 2e^{2x} - 1 - 2e^x - e^{2x})}{(1+e^x)^4} \\ &= \frac{e^x(e^{2x} - 1)}{(1+e^x)^4} \\ &= \boxed{\frac{e^x(e^x - 1)(e^x + 1)}{(1+e^x)^4}} \end{aligned}$$

- (b) On remarque que $\frac{e^x(e^x + 1)}{(1+e^x)^4} > 0$. Le signe de f''_n dépend donc uniquement du signe de $e^x - 1$.
On crée le tableau de variation de la fonction f'_n .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f''_n(x)$	-	0	+
Variations de f'_n	 $n - \frac{1}{4}$		

Or comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n - \frac{1}{4} > 0$, la fonction f'_n est strictement positive sur \mathbb{R} . Donc

$$\boxed{\text{la fonction } f_n \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$$

2. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} nx = -\infty$ donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty.$$

De même $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} nx = +\infty$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

3. (a) On sait que

- La fonction f_n est continue sur \mathbb{R} en tant que somme et quotient de fonctions continues.
- La fonction f_n est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- L'image de \mathbb{R} par la fonction f_n est \mathbb{R} .

Donc, en utilisant le théorème de la bijection,

$$\text{l'équation } f_n(x) = 0 \text{ possède une seule solution sur } \mathbb{R}, \text{ notée } u_n.$$

(b) On calcule d'une part

$$f_n(0) = \frac{1}{2} > 0$$

et d'autre part

$$f_n\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1 + e^{-1/n}} - 1 < 0$$

Ainsi, comme $f_n(0)f_n\left(-\frac{1}{n}\right) < 0$ et f_n est continue, d'après le théorème de Bolzano, l'unique solution de l'équation $f_n(x) = 0$,

$$u_n \text{ vérifie } -\frac{1}{n} < u_n < 0.$$

(c) On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on conclut que

$$\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

(d) On revient à l'équation

$$\begin{aligned} f_n(u_n) = 0 &\iff \frac{1}{1 + e^{u_n}} + nu_n = 0 \\ &\iff -2nu_n = \frac{2}{1 + e^{u_n}} \end{aligned}$$

Or comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + e^{u_n} = 2$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -2n \times u_n = 1.$$

 Calculer une limite en utilisant le théorème du point fixe

Exercice 16

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^4$.

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -u_n^4 \leq 0$. Ainsi

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

2. On va montrer par récurrence les propositions $\mathcal{P}_n : \{u_n > 0\}$.

- **Initialisation** : On a bien $u_0 = \frac{1}{2}$ donc \mathcal{P}_0 est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a donc $u_n > 0$. On regarde si $u_{n+1} = u_n - u_n^4 = u_n(1 - u_n^3)$. Or on sait que $u_n > 0$ (hypothèse de récurrence) et que $u_n < 1/2$ car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Alors $1 - u_n^3 > 0$ donc

$$u_{n+1} > 0$$

Donc la proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

- **Conclusion** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

3. La suite (u_n) est décroissante minorée donc convergente. Si l'on note ℓ la limite de (u_n) le théorème du point fixe impose

$$\ell = \ell + \ell^4 \iff \ell^4 = 0 \iff \ell = 0$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 17 (*)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \rightarrow x + \frac{1}{x} - 1$.

1. On étudie la fonction f . Cette fonction est continue et dérivable sur $[1; +\infty[$ et

$$\forall x \in [1; +\infty[, \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

Or, $x^2 \geq 1 \implies \frac{1}{x^2} \leq 1$ et finalement $1 - \frac{1}{x^2} \geq 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[1; +\infty[$. On a

$$f(1) = 1 + 1 - 1 = 1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Ainsi, $f([1; +\infty[) = [1; +\infty[$. Autrement dit,

l'ensemble $[1; +\infty[$ est stable par f .

2. Soit $x \in [1; +\infty[$, on calcule

$$f(x) - x = \frac{1}{x} - 1$$

Or $x \geq 1$ donc $\frac{1}{x} \leq 1$ et donc

Pour tout $x \in [1; +\infty[$, $f(x) - x \leq 0$.

3. On montre par récurrence les propositions $\mathcal{P}_n : \{u_n \geq 1\}$.

- **Initialisation** : On a bien $u_0 \geq 1$ donc \mathcal{P}_0 est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a donc $u_n \geq 1$. On a d'après la question 1, $u_{n+1} = f(u_n) \geq 1$ Donc la proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

• **Conclusion :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

4. De plus, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1; +\infty[$,

$$f(u_n) - u_n \leq 0 \iff u_{n+1} \leq u_n$$

Ainsi,

la suite (u_n) est décroissante.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Si on note ℓ la limite de la suite, le théorème du point fixe nous dit que

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\iff \ell + \frac{1}{\ell} - 1 = \ell \\ &\iff \frac{1}{\ell} = 1 \\ &\iff \ell = 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

Exercice 18 (**)

Soit f définie par : $f(x) = \ln(x) + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

- La fonction f est croissante en tant que somme de fonctions croissante. On a $f(x) - x = \ln(x)$. On a alors
 - Si $x \in]0, 1[$, $f(x) - x$ est strictement négative.
 - Si $x > 1$, $f(x) - x$ est strictement positive.
- Soit u la suite définie par $u_0 > 1$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - (a) On montre par récurrence $\mathcal{P}_n : \{u_n > 1\}$

Initialisation : On a $u_0 > 1$ donc \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : On suppose la propriété \mathcal{P}_n vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_n > 1 &\implies f(u_n) > f(1) \quad (\text{La fonction } f \text{ est croissante}) \\ &\implies u_{n+1} > 1 \end{aligned}$$

En effet $f(1) = \ln(1) + 1 = 1$. La propriété \mathcal{P}_{n+1} est vraie. (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

Si $x > 1$, $f(x) - x > 0$. Comme $u_n > 1$, on a

$$f(u_n) > u_n \iff u_{n+1} > u_n$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- (b) Supposons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est ℓ . On a alors

$$\begin{aligned} \ell = f(\ell) &\iff \ell = \ln(\ell) + \ell \\ &\iff \ln(\ell) = 0 \\ &\iff \ell = 1 \end{aligned}$$

Comme la suite est croissante, on a nécessairement $u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais on a montré que $u_n > 1$, ce qui est absurde. Ainsi la suite (u_n) n'est pas convergente. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

On suppose à présent que $u_0 = e$.

(c) On montre par récurrence $\mathcal{P}_n : \{u_n \geq e\}$

Initialisation : On a $u_0 = e$ et donc \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : On suppose la propriété \mathcal{P}_n vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_n \geq e &\implies f(u_n) \geq f(e) \quad (\text{La fonction } f \text{ est croissante}) \\ &\implies u_{n+1} \geq e + \ln(e) \geq e \end{aligned}$$

La propriété \mathcal{P}_{n+1} est vraie. (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq e$.

On a alors $\ln(u_n) \geq 1$ et donc $u_{n+1} = f(u_n) = \ln(u_n) + u_n \geq u_n + 1$.

On montre par récurrence $\mathcal{P}_n : \{u_n \geq n + e\}$

Initialisation : On a $u_0 = e$ et donc \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : On suppose la propriété \mathcal{P}_n vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} \geq u_n + 1 \implies u_{n+1} \geq n + e + 1$$

La propriété \mathcal{P}_{n+1} est vraie. (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n + e$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + e = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3. Soit v définie par $v_0 \in]0; 1[$. On démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n < 1$ et pour tout $x \in]0, 1[$, $f(x) - x$ est négative. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Supposons que la suite soit minorée, elle serait donc convergente et sa limite serait nécessairement 1. Cela impliquerait que $v_n \geq 1$, or l'on a montré précédemment que c'était impossible.

Il existe donc un entier n tel que $v_n < 0$. Or cela signifie que v_{n+1} n'est pas définie.

Utiliser le théorème des suites adjacentes

Exercice 19 (*)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} + \frac{1}{(n+1)^3} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \\ &= \frac{1}{(n+1)^3} > 0 \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \left(u_n + \frac{1}{n^2} \right) \\ &= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{n^2 + n^2(n+1) - (n+1)^3}{n^2(n+1)^3} \\ &= \frac{n^3 + 2n^2 - (n^3 + 3n^2 + 3n + 1)}{n^2(n+1)^3} \\ &= \frac{-n^2 - 3n - 1}{n^2(n+1)^3} < 0 \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. Enfin

$$v_n - u_n = \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

2. On en déduit que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont convergentes et ont la même limite.

Exercice 20 ()**

Soient $u_0 > v_0 > 0$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$$

1. On montre par récurrence $\mathcal{P}_n : \{u_n \text{ et } v_n \text{ existent et } u_n > 0, v_n > 0.\}$

Initialisation : D'après l'hypothèse, $u_0 > v_0 > 0$, donc \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : On suppose la propriété \mathcal{P}_n vraie pour un certain $n \geq 0$. u_n et v_n étant strictement positif, alors u_{n+1} et v_{n+1} existent et on a

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} > 0, \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} > 0$$

La propriété \mathcal{P}_{n+1} est vraie. (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n existent et $u_n > 0, v_n > 0$.

2. On a $u_0 > v_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} (u_{n-1} - v_{n-1})^2 \geq 0 &\iff u_{n-1}^2 - 2u_{n-1}v_{n-1} + v_{n-1}^2 \geq 0 \\ &\iff u_{n-1}^2 + 2u_{n-1}v_{n-1} + v_{n-1}^2 \geq 4u_{n-1}v_{n-1} \\ &\iff (u_{n-1} + v_{n-1})^2 \geq 4u_{n-1}v_{n-1} \\ &\iff u_{n-1} + v_{n-1} \geq 2\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} \\ &\iff \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} \geq \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} \\ &\iff u_n \geq v_n \end{aligned}$$

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \leq 0$$

La suite (u_n) est décroissante.

De même et parce que $v_n > 0$, on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\sqrt{u_n v_n}}{v_n} = \sqrt{\frac{u_n}{v_n}} \geq 1$$

La suite (v_n) est croissante.

4. (u_n) étant décroissante et (v_n) étant croissante, on a

$$u_0 \geq u_n \geq v_n \geq v_0$$

Ainsi, les suites (u_n) et (v_n) sont bornées.

(u_n) est décroissante et (u_n) est minorée donc (u_n) est convergente.

(v_n) est croissante et (v_n) est majorée donc (v_n) est convergente.

5. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$. On a alors les équations suivantes

$$\ell = \frac{\ell + \ell'}{2}, \quad \ell' = \sqrt{\ell \ell'}$$

On a

$$\ell = \frac{\ell + \ell'}{2} \iff \frac{\ell}{2} = \frac{\ell'}{2} \iff \ell = \ell'$$

On vérifie que $\ell = \ell'$ permet d'obtenir la seconde condition.

On conclut que $\ell = \ell'$.

6. (u_n) est décroissante, (v_n) est croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = \ell - \ell' = 0$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes.